SIFAT SUB RUANG TOPOLOGI HASIL KALI RUANG METRIK KERUCUT

Badrulfalah[1], Khafsah Joebaedi[2], Iin Irianingsih[3]
[1]*FMIPA Universitas Padjadjaran, Jl. Raya Bandung - Sumedang, Jatinangor; badrulfalah@gmail.com*
[2]*FMIPA Universitas Padjadjaran, Jl. Raya Bandung - Sumedang, Jatinangor; khafsah.jbd@gmail.com*
[3]*FMIPA Universitas Padjadjaran, Jl. Raya Bandung - Sumedang, Jatinangor;* *iin_mtk@yahoo.com*

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang ruang topologi hasil kali ruang metrik kerucut, khususnya tentang aksioma keterhitungan pertama pada subruangnya. Untuk membuktikan sifat, pertama-tama ditunjukkan bahwa ruang topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut memenuhi aksioma keterhitungan pertama, selanjutnya ditunjukkan bahwa setiap subruangnya juga memenuhi sifat tersebut dengan menunjukkan setiap elemen dari setiap subruangnya memiliki basis lokal terhitung. Hasilnya adalah aksioma keterhitungan pertama pada topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut adalah hereditas.

Kata Kunci. Terdiri Mertik kerucut, aksioma keterhitungan pertama, subruang, basis lokal, hereditas

1. Pendahuluan

Metrik kerucut merupakan perluasan dari metrik biasa, didefinisikan oleh Huang & Zhang 2007. Metrik kerucut menginduksi topologi metrik kerucut. Ada banyak sifat topologi. Turkoglu & Abuloha 2010 telah membuktikan bahwa setiap ruang metrik kerucut memenuhi aksioma keterhitungan pertama. Akan tetapi tidak semua sifat topologi yang dimiliki suatu ruang topologi juga dimiliki oleh subruangnya, sebagai contoh separabel. Dalam hal ini subruang dari suatu ruang separable tidak perlu separable. Oleh karena itu, menggunakan hasil pada Turkoglu & Abuloha 2010, pada makalah ini akan dibahas tentang aksioma keterhitungan pertama pada subruang topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan bahwa keterhitungan pertama merupakan sifat hereditas.

2. Metodologi

Artikel ini hasil penelitian yang mengacu pada tiga artikel jurnal. Berisi pembuktian beberapa sifat dari produk topologi kerucut.
Untuk membuktikan bahwa keterhitungan pertama merupakan sifat hereditas pada topologi hasil kali ruang metrik kerucut dilakukan dalam dua bagian:
Bagian pertama adalah membuktikan hasil kali ruang metrik kerucut adalah ruang terhitung pertama, dengan menunjukkan setiap elemennya memiliki basis lokal terhitung.
Pertama-tama mendefinisikan basis lokal untuk elemen sebarang di ruang hasil kali tersebut.
Terakhir ditunjukkan bahwa basis lokal tersebut adalah terhitung.
Sedangkan bagian kedua adalah membuktikan bahwa ruang terhitung pertama merupakan sifat hereditas yaitu dengan menunjukkan bahwa setiap elemen dari setiap subruangnya memiliki basis lokal terhitung.

3. Hasil dan Pembahasan

Beberapa definisi dan lemma yang terkait diberikan sebagai berikut. Pada Definisi 3.1 diberikan definisi ruang metrik
Definisi 3.1: Misal $X \neq \emptyset$ dan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ memenuhi:
(d_1). $0 \leq d(x, y), \forall x, y \in X$ dan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
(d_2). $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
(d_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Maka d disebut metrik pada X dan (X, d) disebut Ruang metrik (Lipschutz,1981)
Setiap metrik menginduksi suatu topologi.
Pada Definisi 3.2 diberikan definisi subruang topologi.
Definisi 3.2 : Misal $(X, \hat{o})$ ruang topologi dan $A \neq \emptyset \subseteq X$. $\hat{o}_A = \{G \cap A | G \in \hat{o}\}$ disebut topologi relatif pada A dan $(A, \hat{o}_A)$ disebut subruang $(X, \hat{o})$. (Lipschutz,1981)

Pada Definisi 3.3 berikut diberikan definisi basis lokal.
Definisi 3.3: Misal $(X, \hat{o})$ ruang topologi dan $p \in X$. Kelas himpunan buka $\hat{a}_p = \{B \text{ buka} | p \in B\}$ dinamakan basis lokal pada p jika $\forall$ G buka dengan $p \in G$ terdapat $G_p \in \hat{a}_p$ sedemikian sehingga $p \in G_p \subset G$. (Lipschutz,1981)

Selanjutnya diberikan definisi hereditas seperti pada Definisi 3.4 berikut.
Definisi 3.4: Misal $(X, \hat{o})$ ruang topologi dan misal P adalah sebuah sifat pada ruang topologi $(X, \hat{o})$. P dikatakan hereditas jika setiap subruang dari $(X, \hat{o})$ juga memiliki sifat P. (Lipschutz,1981)

Lemma 3.5: Jika A_1, A_2 terhitung maka $A_1 \times A_2$ terhitung. (Lipschutz,1981)
Definisi 3.3: Misal $(X, \hat{o})$ ruang topologi dan $p \in X$. Kelas himpunan buka $\hat{a}_p = \{B \text{ buka} | p \in B\}$ dinamakan basis lokal pada p jika $\forall$ G buka dengan $p \in G$ terdapat $G_p \in \hat{a}_p$ sedemikian sehingga $p \in G_p \subset G$. (Lipschutz,1981)
Selanjutnya diberikan definisi hereditas seperti pada Definisi 3.4 berikut.

Definisi 3.4: Misal $(X, \hat{o})$ ruang topologi dan misal P adalah sebuah sifat pada ruang topologi $(X, \hat{o})$. P dikatakan hereditas jika setiap subruang dari $(X, \hat{o})$ juga memiliki sifat P. (Lipschutz,1981)

Lemma 3.5: Jika A_1, A_2 terhitung maka $A_1 \times A_2$ terhitung. (Lipschutz,1981)

Pada Definisi 3.6 diberikan definisi ruang terhitung pertama.
Definisi 3.6: Misal $(X, \hat{o})$ ruang topologi. X disebut ruang terhitung pertama jika setiap $p \in X$ memiliki basis lokal terhitung. (Lipschutz,1981)

Lemma 3.7 : Misal $(A, \hat{o}_A)$ subruang $(X, \hat{o})$ dan $p \in A$. Jika $\hat{a}_p$ basis lokal untuk $p \in X$ maka $\hat{a}^*{}_p = \hat{a}_p \cap A$ adalah basis lokal untuk $p \in A$.
Melalui perluasan ruang metrik biasa, diperoleh ruang metrik kerucut. Sebelum diberikan definisi metrik kerucut terlebih dahulu diberikan definisi kerucut seperti dinyatakan pada Definisi 3.8 berikut.

Definisi 3.8: Misal E ruang Banach Real misal $P \subseteq E$. Himpunan Pdisebut kerucut jika :
i. $P \neq \emptyset$ tutup, dan $P \neq \{0\}$.
ii. Jika $a, b \geq 0$ dan Jika $x, y \in P$, maka ;$ax + by \in P$
iii. $P \cap (-P) = \{0\}$. (Sabetghadam, 2009)

Selanjutnya diberikan definisi ruang metrik kerucut yang didefinisikan oleh Huang dan Zhang seperti dinyatakan pada Definisi 3.9 berikut.
Definisi 3.9: Misal $X \neq \emptyset$ dan E ruang Banach Real yang dilengkapi dengan pengurutan parsial $\leq$ terhadap kerucut $P \subseteq E$. Jika $d: X \times X \to E$ memenuhi:
(d_1). $0 \leq d(x, y), \forall x, y \in X$ dan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
(d_2). $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
(d_3). $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. $\forall x, y, z \in X$
Maka d disebut metrik kerucut pada X dan (X, d) disebut Ruang metrik kerucut (Huang, 2007).

Pada Definisi 3.10 berikut diberikan definisi topologi metrik kerucut
Definisi 3.10 : Misal (X, d) ruang metrik kerucut. Topologi $\hat{o}$ pada X yang dibangkitkan oleh sphere buka di X dinamakan topologi metrik kerucut atau topologi yang diinduksi oleh metrik kerucut d.
Untuk selanjutnya jika disebutkan (X, d) ruang metrik kerucut maka selalu diasumsikan bahwa E dan P masing-masing sebagai ruang Banach Real dan kerucut dari ruang terkait.

Dengan cara serupa pada pendefinisian himpunan buka di ruang metrik biasa, pada Definisi 3.11 berikut diberikan definisi himpunan buka di ruang metrik kerucut.

Definisi 3.11: Misal (X_1, d_1) ruang metrik kerucut. W_1 dikatakan buka di X_1 jika untuk setiap $p_1 \in W_1$terdapat $S(p_1, ä_1)$ dengan $ä_1 \in E_1$ sedemikian sehingga $S(p_1, ä_1) \subseteq W_1$.

Lemma 3.12: Setiap ruang metrik kerucut adalah ruang terhitung pertama.
(Turkoglu, 2010).

Definisi 3.13: Misal (X_1, d_1) dan (X_2, d_2) ruang metrik kerucut. Hasil kali X_1 dan X_2, dinotasikan $X_1 \times X_2$adalah ruang metrik kerucut dengan metrik kerucut d, dinotasikan $(X_1 \times X_2, d)$.

Dengan cara serupa pada pendefinisian himpunan buka di ruang metrik biasa, berikutnya pada Definisi 3.14 diberikan definisi himpunan buka pada ruang hasil kali metrik kerucut.
Definisi 3.14: Misal $(X_1 \times X_2, d)$ ruang metrik kerucut. $W \subseteq X_1 \times X_2$adalah buka jika untuk setiap $p = (p_1, p_2) \in W$ terdapat W_1dan W_2masing-masing adalah buka di X_1 dan X_2 dan sphere buka $S(p_1, ä_1)$ dan $S(p_2, ä_2)$ dengan $ä_1, ä_2 \in E$ dan $p_1 \in W_1$ dan $p_2 \in W_2$sedemikian sehingga $(p_1, p_2) \in S(p_1, ä_1) \times S(p_2, ä_2) \subseteq W_1 \times W_2 \subseteq W$.

Pada Lemma 3.12 dinyatakan bahwa ruang metrik kerucut adalah ruang terhitung pertama. Sebagai hasil selanjutnya akan ditunjukkan bahwa keterhitungan pertama pada ruang metrik kerucut $X_1 \times X_2$ bersifat hereditas
Dengan terlebih dahulu membuktikan bahwa ruang topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut $X_1 \times X_2$ memenuhi aksioma keterhitungan pertama. Masing-masing diberikan pada Teorema 3.15 dan Teorema 3.16.
Teorema 3.15: Misal $(X_1 \times X_2, d)$ ruang metrik kerucut maka $X_1 \times X_2$ adalah ruang terhitung pertama.
Bukti: Ambil $p \in X_1 \times X_2$ sebarang maka $p = (p_1, p_2)$ suatu $p_1 \in X_1$ dan $p_2 \in X_2$. Karena X_1 ruang metrik kerucut, berdasarkan Lemma 3.12 maka X_1 ruang terhitung pertama. Berdasarkan Definisi 3.6 maka terdapat $â_{p_1} = \left\{ S\left(p_1, ä\left(\frac{c}{n}\right)\right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ basis lokal terhitung untuk p_1 dengan $c \gg 0, c \in E$.
Karena X_2 ruang metrik kerucut, berdasarkan Lemma 3.12 maka X_2 ruang terhitung pertama. Berdasarkan Definisi 3.6 maka terdapat $â_{p_2} = \left\{ S\left(p_2, ä\left(\frac{c}{m}\right)\right) \middle| m \in \mathbb{N} \right\}$basis lokal terhitung untuk p_2 dengan $c \gg 0, c \in E$.
Definisikan $â_p = â_{p_1} \times â_{p_2}$. Akan ditunjukkan $â_p$ basis lokal terhitung untuk p.
Misal $G \subset X_1 \times X_2$ buka dengan $p \in G$ maka $G = G_1 \times G_2$ untuk suatu G_1 buka di X_1 dan G_2 buka di X_2 dengan $p_1 \in G_1$ dan $p_2 \in G_2$. Karena $â_{p_1}$ basis lokal p_1 , berdasarkan Definisi 3.3 maka terdapat

$$B_{ä\left(\frac{c}{n_0}\right)}(p_1) = S\left(p_1, ä\left(\frac{c}{n_0}\right)\right) \in â_{p_1}$$

sedemikian sehingga $B_{ä\left(\frac{c}{n_0}\right)}(p_1) = S\left(p_1, ä\left(\frac{c}{n_0}\right)\right) \subset G_1$.
Karena Karena $â_{p_2}$ basis lokal p_2, berdasarkan Definisi 3.3 maka terdapat

$$B_{ä\left(\frac{c}{m_0}\right)}(p_2) = S\left(p_2, ä\left(\frac{c}{m_0}\right)\right) \in â_{p_2}$$

sedemikian sehingga

$$B_{ä\left(\frac{c}{m_0}\right)}(p_2) = S\left(p_2, ä\left(\frac{c}{m_0}\right)\right) \subset G_2.$$

Pilih $l =$ maks. (n_0, m_0) maka

$$B_{ä\left(\frac{c}{l}\right)}(p) = S\left(p, ä\left(\frac{c}{l}\right)\right) = S\left(p_1, ä\left(\frac{c}{l}\right)\right) \times S\left(p_2, ä\left(\frac{c}{l}\right)\right) \subset G_1 \times G_2 = G.$$

berdasarkan Definisi 3.3 maka $â_p = â_{p_1} \times â_{p_2}$ adalah basis lokal pada p. Karena $â_{p_1}$dan $â_{p_2}$ terhitung, berdasarkan Lemma 3.5 maka $â_p$ terhitung. Jadi untuk setiap $p \in X_1 \times X_2$ memiliki basis lokal terhitung. Berdasarkan Definisi 3.6 dapat disimpulkan bahwa $X_1 \times X_2$ ruang terhitung pertama. Dengan kata lain $X_1 \times X_2$ memenuhi aksioma keterhitungan pertama.

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa tidak hanya $X_1 \times X_2$ bersifat terhitung pertama akan tetapi setiap subruangnya juga terhitung pertama, seperti dinyatakan pada Teorema 3.16.

Teorema 3.16: Keterhitungan pertama adalah sifat hereditas pada ruang topologi hasil kali ruang metrik kerucut $X_1 \times X_2$.

Bukti: Misal $(A, ô_A)$ subruang sebarang dari $X_1 \times X_2$. Akan ditunjukkan $(A, ô_A)$ ruang terhitung pertama.

Ambil $p \in A$ sebarang. Karena $A \subset X_1 \times X_2$maka $p \in X_1 \times X_2$. Perdefinisi maka $p = (p_1, p_2)$ untuk suatu $p_1 \in X_1$ dan $p_2 \in X_2$. Karena X_1ruang metrik kerucut, berdasarkan Lemma 3.12 maka X_1ruang terhitung pertama. Berdasarkan Definisi 3.6 maka terdapat $â_{p_1} = \left\{S\left(p_1, ä\left(\frac{c}{n}\right)\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ basis lokal terhitung untuk p_1 dengan $c \gg 0, c \in E$. Begitu juga karena X_2 ruang metrik kerucut, Berdasarkan Lemma 3.12 maka X_2 ruang terhitung pertama.

Berdasarkan Definisi 3.6 maka terdapat $â_{p_2} = \left\{S\left(p_2, ä\left(\frac{c}{m}\right)\right) \middle| m \in \mathbb{N}\right\}$ basis lokal terhitung untuk p_2 dengan $c \gg 0, c \in E$.

Definisikan $â_p = â_{p_1} \times â_{p_2}$. Akan ditunjukkan bahwa $â_p$ basis lokal terhitung pada p.

Misal $G \subset X_1 \times X_2$ buka dengan $p \in G$ maka $G = G_1 \times G_2$ untuk suatu G_1 buka di X_1 dan G_2 buka di X_2 dengan $p_1 \in G_1$ dan $p_2 \in G_2$. Karena $â_{p_1}$basis lokal p_1, berdasarkan Definisi 3.3 maka terdapat

$B_{ä\left(\frac{c}{n_0}\right)}(p_1) = S\left(p_1, ä\left(\frac{c}{n_0}\right)\right) \in â_{p_1}$ dengan $c \gg 0, c \in E$.

sedemikian sehingga $B_{ä\left(\frac{c}{n_0}\right)}(p_1) = S\left(p_1, ä\left(\frac{c}{n_0}\right)\right) \subset G_1$.

Karena $â_{p_2}$ basis lokal p_2 , berdasarkan Definisi 3.3 maka terdapat

$B_{ä\left(\frac{c}{m_0}\right)}(p_2) = S\left(p_2, ä\left(\frac{c}{m_0}\right)\right) \in â_{p_2}$ dengan $c \gg 0, c \in E$

sedemikian sehingga $B_{ä\left(\frac{c}{m_0}\right)}(p_2) = S\left(p_2, ä\left(\frac{c}{m_0}\right)\right) \subset G_2$.

Pilih $l = \text{maks.}\,(n_0, m_0)$ maka

$$B_{\text{ä}\left(\frac{c}{l}\right)}(p) = S\left(p, \text{ä}\left(\frac{c}{l}\right)\right) = S\left(p_1, \text{ä}\left(\frac{c}{l}\right)\right) \times S\left(p_2, \text{ä}\left(\frac{c}{l}\right)\right) \subset G_1 \times G_2 = G.$$

Berdasarkan Definisi 3.3 maka $\text{â}_p = \text{â}_{p_1} \times \text{â}_{p_2}$ adalah basis lokal pada p di $X_1 \times X_2$.
Selanjutnya misalkan $G_A = G \cap A$ maka $G_A = (G_1 \cap A_1) \times (G_2 \cap A_2) \in \text{ô}_A$.
Karena $p \in A$ dan $p \in G$ maka $p \in G_A$ sehingga $p_1 \in G_1 \cap A_1$ dan $p_2 \in G_2 \cap A_2$.
Definisikan ${\text{â}_{p_1}}^* = \text{â}_{p_1} \cap A_1$ dan ${\text{â}_{p_2}}^* = \text{â}_{p_2} \cap A_2$, berdasarkan Lemma 3.7 maka ${\text{â}_{p_1}}^*$ dan ${\text{â}_{p_2}}^*$ masing-masing basis lokal pada $p_1 \in A_1$ dan $p_2 \in A_2$.
Definisikan ${\text{â}_p}^* = \text{â}_p \cap A = \text{â}_{p_1} \times \text{â}_{p_2} \cap A = \text{â}_{p_1} \cap A_1 \times \text{â}_{p_2} \cap A_2$. Karena â_p adalah basis lokal pada p di $X_1 \times X_2$, berdasarkan Lemma 3.7 maka ${\text{â}_p}^*$ adalah basis lokal p di A. Karena â_p terhitung maka ${\text{â}_p}^*$ terhitung. Dengan demikian setiap elemen dari setiap subruang $(A, \text{ô}_A)$ memiliki basis lokal terhitung. Berdasarkan Definisi 3.6 maka $(A, \text{ô}_A)$ adalah subruang ruang terhitung pertama. Dengan perkataan lain setiap subruang dari ruang topologi hasil kali ruang metrik kerucut memenuhi aksioma keterhitungan pertama. Oleh karena itu berdasarkan Definisi 3.4 maka keterhitungan pertama pada ruang topologi hasil kali ruang metrik kerucut adalah hereditas.

4. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh bahwa setiap elemen dari hasilkali dua ruang metrik kerucut memiliki basis lokal terhitung sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil kali ruang metrik kerucut adalah ruang terhitung pertama. Selain itu setiap elemen dari setiap subruang dari ruang hasil kali ruang metrik kerucut memiliki basis lokal terhitung yakni setiap subruangnya adalah ruang terhitung pertama. Dengan perkataan lain, aksioma keterhitungan pertama merupakan hereditas pada ruang topologi hasil kali ruang metrik kerucut.

Daftar Pustaka

Huang, L.G & Zhang, X. (2007). *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mapping*, Journal of Mathematical Analysis and Applicationsm vol.332, no.2, pp.1468-1476.

Lipschutz, Seymour. (1981). *Theory and Problems General Topology,* McGraw-Hill, Singapore.

Sabetghadam, F&Masiha and A.H.Sanatpour. (2009). *Some couple fixed point theorems in Cone metric spaces*, Hindawi Publishing Corporation, Fixed Point Theory and Applications vol.2009, Article ID 125426, 8 pages.

Turkoglu, D & Abuloha, M. (2010). *Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mapping,* Acta Mathematica Sinica, vol.26, no.3, pp.489-496.